Phần 3 : LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ HỮU HẠN VÀ ỨNG DỤNG

Chương 6. ĐỒ THỊ HỮU HẠN VÀ ỨNG DỤNG

## 6.1. ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

**6.1.1. Định nghĩa**

Cho X là một tập hợp rời rạc  gọi là tập các đinh, U là tập các cặp có thứ tự gồm 2 phần tử của X, mỗi cặp phần tử đó gọi là một cung. Khi đó  gọi là đồ thị có hướng. X và U đều là các tập rời rạc nên G gọi là đồ thị hữu hạn.

Để biểu diễn hình học một đồ thị, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một điểm; mỗi cung  được biểu diễn bởi một mũi tên, nối  với . *Thí dụ.*



**Hình 6.1**

Đồ thị ở hình 6.1 có 10 đỉnh và 13 cung, cung  có  là đỉnh gốc,  là đỉnh ngọn. Cung  gọi là một khuyên. Đỉnh  không có cung đến cũng không có cung đi, gọi là đỉnh cô lập.

Nếu ta ký hiệu  là tập các đỉnh có cung đến từ x thì chính là phép biến đổi .

Khi đó một đồ thị có hướng  cũng có thể định nghĩa như là:

 trong đó X là tập đỉnh và là phép biến đổi X vào X. Hai định nghĩa này hoàn toàn tương đương.

Nếu , tức là đồ thị không có khuyên, ta gọi đó là đồ thị đơn. Sau này ta chỉ nghiên cứu các đồ thị đơn, nên để cho ngắn gọn, ta bỏ qua tính từ “đơn” này, nghĩa là khi ta nói: cho đồ thị có hướng  thì ta hiểu ngầm là đồ thị đơn.

**6.1.2. Đường đi và mạch**

Hai đỉnh có cung nối gọi là 2 đỉnh kề, trong đó 1 đỉnh là gốc còn đỉnh kia là ngọn.

Hai cung gọi là kề nhau nếu ngọn của cung này là gốc của cung kia. Trên hình 6.1: Hai cung  và  là 2 cung kề nhau.

Dãy các cung liên tiếp kề nhau xuất phát từ x, kết thúc tại y gọi là một đường đi từ x đến y. Đường đi đó là sơ cấp nếu mỗi đỉnh chỉ qua một lần.

*Thí dụ.*

Các cung  là đường đi từ  đến ; đó là một đường đi sơ cấp.

Nếu đường đi là khép kín, nghĩa là  ta gọi đó là một mạch. Đường sơ cấp khép kín gọi là mạch sơ cấp.

*Thí dụ.*

 là một mạch sơ cấp

 là một mạch, nhưng không phải là mạch sơ cấp vì đi qua đỉnh  hai lần.

Mạch đi qua tất cả các cung mỗi cung chỉ một lần là **mạch Euler**, mạch đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh chỉ một lần là **mạch Hamilton**.



**Hình 6.2 Hình 6.3**

Hình 6.2 là thí dụ về một mạch Euler, cũng là mạch Hamilton, còn hình 6.3 là mạch Euler mà không phải là mạch Hamilton.

**6.1.3. Đồ thị liên thông**

a)  gọi là **liên thông mạnh** nếu với mọi cặp đỉnh  đều có đường đi từ x đến y; liên thông mạnh còn gọi là **liên thông 2 chiều**.

b)  gọi là **liên thông yếu** nếu với mọi cặp đỉnh mà không có đường đi từ x đến y thì có đường đi từ y đến x; liên thông yếu còn gọi là **liên thông một chiều.**



**Hình 6.4 Hình 6.5**

Hình 6.4 là thí dụ về liên thông mạnh. Từ một đỉnh bất kỳ đều có đường đi đến mọi đỉnh khác. Hình 6.5 là đồ thị liên thông yếu.

Nếu ta có  và  là hai đồ thị liên thông và

 và 

thì đồ thị  trong đó  và  là đồ thị không liên thông nhưng có 2 thành phần liên thông.

**6.1.4. Đồ thị con và đồ thị bộ phận**

***a) Đồ thị con.***

Cho 2 đồ thị  và . Ta nói rằng  là **đồ thị con** của đồ thị G nếu:

 và 

Như vậy nếu ***bớt đi một số đỉnh và các cung liên hệ với đỉnh đó ta được một đồ thị con*** của G.

Nếu bớt đi một đỉnh  thì từ đồ thị của hình 6.4, ta có đồ thị con sau

đây:



**Hình 6.6**

***b) Đồ thị bộ phận.***

Nếu  và  thì  là **đồ thị bộ phận** của , tức là nếu ta ***bớt đi một số cung mà giữ nguyên số đỉnh thì ta có được một đồ thị bộ phận.***

**6.1.5. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận**

***a) Ma trận kề***

Cho đồ thị  trong đó . Ma trận  là ma trận kề của đồ thị G được xác định như sau:



*Thí dụ.*



**Hình 6.7**

Đồ thị cho ở hình 6.7, có ma trận kề như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Ma trận kề xác định hoàn toàn cấu trúc của đồ thị. Số các số 1 trên đồ thị là số cung của đồ thị. Số các số 1 trên hàng  là số cung đi từ . Số các số 1 trên cột  là số các cung đến . Nếu tất cả các số trên dòng  đều bằng 0 thì  là đỉnh ra của đồ thị (thí dụ ). Nếu tất cả các số trên cột  đều bằng 0 thì  là đỉnh vào của đồ thị (thí dụ ).

***b) Ma trận trọng số.*** Nếu với mỗi cung , ta gán cho 1 số , số này có thể là **độ dài** của cung  hoặc chi phí cho hành trình đi thẳng từ  đến .

Khi đó ma trận trọng số của đồ thị được xác định như sau:



*Thí dụ.*



**Hình 6.8**

Ma trận trọng số của đồ thị trên hình 6.8 có dạng như sau:

Việc biểu diễn đồ thị bằng ma trận tạo điều kiện cho việc giải các bài toán tìm kiếm hoặc tối ưu trên đồ thị bằng máy tính điện tử.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 5 | 7 |  |  |  |
|  |  | 0 |  |  | 2 |  |
|  |  |  | 0 |  |  |  |
|  |  |  | 4 | 0 |  |  |
|  | 3 |  |  | 6 | 0 |  |
|  | 8 |  |  |  | 4 | 0 |

## 

## 6.2. ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

**6.2.1. Các định nghĩa**

Tương tự như đồ thị có hướng; ta định nghĩa  là một đồ thị vô hướng trong đó X là tập các đỉnh và V là tập các cạnh. Mỗi  là một đoạn thằng nối 2 đỉnh, không phân biệt đỉnh đầu và đỉnh cuối. Trên thực tế có rất nhiều thí dụ về đồ thị vô hướng. Chẳng hạn khi xem bản đồ giao thông thì mỗi nút giao thông: giao điểm của 2 hoặc nhiều đường coi như 1 đỉnh; đường giao thông nối liền 2 nút coi như một cạnh, không phân biệt nút đầu và nút cuối, mỗi cạnh cũng có thể coi như 2 cung ngược chiều nhau. Do đó khi chuyển từ đồ thị có hướng sang đồ thị vô hướng, có những khái niệm vẫn giữ nguyên (chẳng hạn đỉnh của đồ thị); có những khái niệm phải đổi tên cho phù hợp, để tránh lầm lẫn.

***a) Một số khái niệm được đổi tên***.

- Cung đổi thành cạnh

- Đường đi từ x đến y đổi thành xích nối x và y

- “Mạch là đường đi khép kín” đổi thành: “chu trình là xích nối khép kín”

Từ đó cũng suy ra:

- Xích sơ cấp là xích đi qua mỗi đỉnh một lần.

- Chu trình sơ cấp là một xích sơ cấp khép kín.

- Chu trình Euler là một chu trình đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần.

- Chu trình Hamilton là chu trình đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.

***b) Một số khái niệm giữ nguyên tên gọi, nhưng nội dung cần được xác định lại cho phù hợp với đồ thị vô hướng.***

- Hai đỉnh kề nhau là 2 đỉnh có cạnh nối.

- Hai cạnh kề nhau là 2 cạnh có một đỉnh chung.

- Nếu bớt một số đỉnh và cạnh liên quan các đỉnh đó thì được một đồ thị con.

- Nếu giữ nguyên các đỉnh và bớt đi một số cạnh ta được một đồ thị bộ phận.

- Đồ thị vô hướng gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh (x, y) đều có 1 xích nối. Trong đồ thị vô hướng không có khái niệm liên thông mạnh và liên thông yếu.

**6.2.2. Đồ thị đủ**

Đồ thị  gọi là đồ thị đủ nếu mọi cặp đỉnh đều kề nhau; nghĩa là . Nếu  thì số cạnh sẽ là:



Định nghĩa trên cũng được dùng cho đồ thị có hướng , nhưng nội dung cần được hiểu chính xác hơn; đó là với mọi cặp đỉnh  nếu cung  thì , nghĩa là mọi cặp đỉnh đều kề nhau.

Dễ dàng thấy rằng đồ thị đủ có các tính chất sau đây:

- Đồ thị đủ không có đỉnh cô lập.

- Đồ thị đủ là đồ thị liên thông.

- Mọi đồ thị con của đồ thị đủ cũng là đồ thị đủ.

## 6.3. ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

**6.3.1. Bậc của đỉnh.**

Khái niệm về bậc của đỉnh, chỉ dùng cho đồ thị vô hướng, đó là số cạnh nối một đỉnh với các đỉnh khác và kí hiệu là .

Nếu  thì x là đỉnh cô lập;  thì x là đỉnh treo. Nếu  thì  là đồ thị chính quy (còn gọi là đồ thị đều) bậc r.

Dễ dàng thấy rằng nếu  là độ thị đủ có n đỉnh thì đó là đồ thị chính quy bậc .



**Hình 6.9 Hình 6.10**

**Đồ thị chính quy bậc 3 Đồ thị chính quy bậc 4**

Khái niệm bậc của đỉnh có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu đồ thị Euler và đồ thị Hamilton và từ đó giúp ta nghiên cứu các bài toán quan trọng trong lý thuyết đồ thị.

**6.3.2. Đồ thị Euler và bài toán 7 chiếc cầu ở Koenigsberg**

***a) Các định nghĩa.***

Cho  là đồ thị liên thông

- Một xích đi qua tất cả các cạnh của G, mỗi cạnh 1 lần gọi là xích Euler.

- Một xích Euler khép kín gọi là chu trình Euler.

- Đồ thị  chứa một chu trình Euler gọi là đồ thị Euler.

- Đồ thị  chứa 1 xích Euler gọi là đồ thị nửa Euler.

*Thí dụ.*

 **H1 H2 H3**

**Hình 6.11**

Trên hình 6.11:

 là đồ thị Euler vì có chu trình Euler ;

 là đồ thị nửa Euler vì có xích Euler .

Còn  không có chu trình Euler, cũng không có đường đi Euler.

Một điều quan trọng là làm thế nào để nhận biết một đồ thị đã cho có phải là đồ thị Euler hay không. Muốn vậy ta chứng minh định lý sau đây:

***b) Định lý Euler.*** Đồ thị liên thông  là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

***Chứng minh.***Điều kiện cần: Giả sử  là đồ thị Euler, vậy nó chứa một chu trình đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần. Mỗi lần chu trình đi qua 1 đỉnh nào đó thì bậc của đỉnh ấy tăng lên 2 đơn vị; do đó các đỉnh trung gian đều có bậc chẵn. Chỉ có đỉnh đầu và đỉnh cuối có bậc 1; vì đỉnh xuất phát trùng với đỉnh cuối cùng, vậy đỉnh này có bậc bằng 2 nếu chu trình không đi qua đỉnh này một lần nào nữa. Vậy mọi đỉnh đều có bậc chẵn.

Điều kiện đủ: Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo số cạnh của . Vì G liên thông và bậc của tất cả các đỉnh là chẵn nên các bậc đó đều . Dễ dàng thấy rằng G luôn chứa một chu trình C nào đó. Nếu C đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh 1 lần thì định lý đã được chứng minh.

Nếu chu trình C không đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh 1 lần thì ta loại các cạnh của C khỏi đồ thị G và được đồ thị bộ phận H mà bậc của tất cả các đỉnh đều là chẵn nhưng không nhất thiết là liên thông; có thể liên thông hoặc liên thông từng phần.

Theo giả thiết quy nạp, định lý đã đúng cho đồ thị với số cạnh . Ta chứng minh định lý đúng với đồ thị có số cạnh  (định lý đúng với  và  là hiển nhiên). Giả sử G có  cạnh và H có 2 thành phần liên thông  và ; các đỉnh của  và  đều có bậc là số chẵn và số cạnh đều .  và  đều chứa chu trình Euler (theo giả thiết quy nạp), ta kí hiệu tương ứng là  và . Khi đó chu trình Euler của G được thiết lập như sau:

Xuất phát từ đỉnh , đi theo các cạnh của C cho đến khi gặp đỉnh  thì đi theo các cạnh của  cho đến khi trở lại , sau đó đi tiếp theo các cạnh của C cho đến khi gặp  thì đi theo các cạnh của  cho đến khi trở về ; sau đó lại đi theo các cạnh của C để trở về  thì sẽ được chu trình Euler của C. Sự tồn tại của  và  là do giả thiết G là đồ thị liên thông. Định lý đã được chứng minh. (xem hình 6.12)



**Hình 6.12**

***c) Bài toán 7 chiếc cầu ở Konigsberg***

Thành phố Konigsberg trước kia thuộc nước Phổ, bây giờ là thành phố Kaliningrad thuộc Cộng hòa liên bang Nga, được chia thành 4 vùng A, B, C, D ngăn cách bởi các nhánh sông Pregel; trong đó A, B là hai bên bờ sông. Vào thế kỷ 18 người ta đã xây 7 chiếc cầu nối các miền như hình 6.13. Người dân thường dạo chơi qua những chiếc cầu. Họ tự hỏi: liệu có thể xuất phát từ một nơi nào đó (A, B, C hoặc D) đi qua tất cả 7 chiếc cầu, mỗi cầu 1 lần rồi quay về nơi xuất phát được không?



**Hình 6.13**

Trong nhiều năm, đây là bài toán khó. Người ta liệt kê rất nhiều hành trình nhưng không tìm được lời giải. Tuy nhiên cũng không ai chứng minh được hành trình thỏa mãn điều kiện trên là không có. Năm 1736 nhà toán học Thụy sĩ là Euler đã công bố lời giải bài toán này, và đây cũng là ứng dụng đầu tiên của lý thuyết đồ thị. Euler đã biểu diễn bản đồ trên hình 6.13 bởi một đồ thị phẳng dưới đây, trong đó mỗi cạnh nối hai đỉnh tương ứng với 1 chiếc cầu.



**Hình 6.14**

Hành trình đi qua tất cả 7 chiếc cầu, mỗi cầu 1 lần, tương ứng mỗi một chu trình Euler của đồ thị (hình 6.14). Nhưng đồ thị này không phải là đồ thị Euler vì có các đỉnh bậc lẻ (ở đây tất cả các đỉnh đều có bậc lẻ). Do đó hành trình thỏa mãn các điều kiện đặt ra là không có. Bài toán đã được giải quyết.

**6.3.3. Đồ thị Hamilton và bài toán người đưa thư**

***a) Định nghĩa.***

Đồ thị  gọi là đồ thị Hamilton nếu nó liên thông và chứa một chu trình đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần. Đồ thị trên hình 6.14 là đồ thị Hamilton, vì có chu trình ACBDA đi qua tất cả các đỉnh mỗi đỉnh một lần. Cho đến nay việc tìm điều kiện cần và đủ cho đồ thị Hamilton vẫn còn là một vấn đề mở, nhưng có một kết quả nghiên cứu đáng chú ý là nếu ta tăng thêm số cạnh nối các đỉnh của G đến một mức nào đó thì sẽ thu được một đồ thị Hamilton. Đó là một điều kiện đủ, thể hiện bằng một định lý dưới đây.

***b) Định lý Dirac (1952)***

Cho  là một đồ thị đơn; liên thông và có n đỉnh.

Nếu  thì  là đồ thị Hamilton.

Chứng minh của định lý này có thể tìm thấy trong [9].

Một bài toán thực tế dẫn đến việc tìm chu trình Hamilton của một đồ thị là bài toán quenthuộc dưới đây

***c) Bài toán người đưa thư***

Một nhân viên bưu điện, xuất phát từ trạm bưu điện mà anh ta làm việc, cần chuyển n bức thư đến n địa chỉ khác nhau, mỗi nơi chỉ đến 1 lần rồi trở về trạm bưu điện, hãy tìm một hành trình ngắn nhất.

Mỗi hành trình như thế là một chu trình Hamilton. Theo định lý Dirac nếu bậc của tất cả các đỉnh đều  thì bài toán có lời giải. Nhưng đây chỉ là điều kiện đủ; nếu có một đỉnh nào đó có bậc  thì vẫn chưa thể khẳng định được rằng đồ thị không phải là đồ thị Hamilton.

Khi giải bài toán người du lịch, vấn đề đặt ra hoàn toàn tương tự, nhưng

ta giả thiết là biết ma trận chi phí  nghĩa là ta đã thừa nhận đồ

thị đã cho là một đồ thị đủ, nghĩa là mọi cặp đỉnh đều kề nhau nên sự tồn tại chu trình Hamilton là điều đương nhiên.

Còn với bài toán người đưa thư, bản đồ giao thông trên một địa bàn hẹp, với những điều kiện địa hình cụ thể, không phải lúc nào cũng là một đồ thị Hamilton. Do đó vẫn đề đặt ra trước tiên lại là có chu trình Hamilton hay không, nếu không có thì bài toán trở nên vô nghĩa.

## 6.4. CÂY VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ CÂY

**6.4.1. Định nghĩa**

***Cây*** là đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình.

Các hình dưới đây đều là cây:



**Hình 6.15**

Độ dài của một cây là số cạnh của cây đó.

Một cây chứa tất cả các đỉnh của đồ thị gọi là ***cây bao trùm*** hoặc là ***cây khung*** của đồ thị đó. Một đồ thị liên thông có thể chứa nhiều cây bao trùm khác nhau. Các tính chất quan trọng của một cây được thể hiện bởi định lý dưới đây.

**6.4.2. Định lý về các mệnh đề tương đương**

Cho *** là đồ thị vô hướng liên thông có n đỉnh và m cạnh***.

Khi đó 6 mệnh đề dưới đây là tương đương.

***Mệnh đề 1***: G là 1 ***cây bao trùm*** nghĩa là G liên thông có đủ n đỉnh và không chứa chu trình (đây là định nghĩa).

***Mệnh đề 2***: G không chứa chu trình và có  cạnh.

***Mệnh đề 3***: G liên thông và có  cạnh.

***Mệnh đề 4***: G không chứa chu trình và nếu thêm 1 cạnh nối 2 đỉnh không kề nhau thì xuất hiện đúng 1 chu trình.

***Mệnh đề 5***: G liên thông và nếu bỏ đi 1 cạnh tùy ý thì sẽ được một đồ thị bộ phận không liên thông (nghĩa là mất tính liên thông).

***Mệnh đề 6***: Mỗi cặp đỉnh của G được nối với nhau bởi một xích (hay dây chuyền) duy nhất!

***Chứng minh***. Ta sẽ chứng minh theo trình tự sau đây:

Mệnh đề 1  Mệnh đề 2  Mệnh đề 3  Mệnh đề 4  Mệnh đề 5

 Mệnh đề 6  Mệnh đề 1

**a) Mệnh đề 1  Mệnh đề 2:**

- Vì liên thông nên ;

- Vì không có chu trình nên 

Vậy 

**b) Mệnh đề 2  Mệnh đề 3:**

Giả thiết có mệnh đề 2, ta chỉ chứng minh G là liên thông.

Nếu G không liên thông thì ta giả thiết rằng G có 2 thành phần liên thông là  và  tương ứng với số cạnh và số đỉnh là  và .

Vì G không chứa chu trình nên  và  cũng không có chu trình.

Do a) ta có:

 và 

Ta lại có



Mâu thuẫn với giả thiết là đã có .

**c) Mệnh đề 3  Mệnh đề 4:**

Giả thiết là có G liên thông và .

Ta phải chứng minh: G không chứa chu trình.

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Nếu G chứa một chu trình C gồm k đỉnh, k cạnh. Ta xét đồ thị con  bằng cách loại k đỉnh của C thì  có  đỉnh, liên thông và không chứa chu trình. Theo chứng minh a) thì  có  cạnh. Tổng số cạnh của  và C là  cạnh = số cạnh của G, do đó C và  chưa có cạnh nối, nghĩa là G không liên thông, trái với giả thiết.

Nếu thêm một cạnh nối 2 đỉnh không kề nhau, vì G là liên thông nên 2 đỉnh này đã có xích nối nên xuất hiện đúng 1 chu trình.

**d)Mệnh đề 4  Mệnh đề 5:**

Ta phải chứng minh 2 phần:

G là liên thông. Nếu G không liên thông thì có một cặp đỉnh ( không có xích nối, khi đó thêm vào G một cạnh nối x và y sẽ không tạo ra chu trình; trái với giả thiết. Vậy G liên thông.

Nếu bỏ đi 1 cạnh mà G vẫn liên thông thì khôi phục cạnh này ta được một chu trình, mâu thuẫn với giả thiết là mệnh đề 4. Vậy bớt đi 1 cạnh thì G sẽ mất liên thông.

**e) Mệnh đề 5  Mệnh đề 6:**

Nếu có 2 đỉnh không có xích nối thì G không liên thông trái với giả thiết là mệnh đề 5. Vậy mọi cặp đỉnh x, y đều có xích nối.

Nếu có 2 đỉnh có 2 xích nối, thì bớt đi 1 cạnh trên 1 xích đồ thị vẫn liên thông, trái với giả thiết; vậy mỗi cặp đỉnh của G có 1 xích duy nhất nối chúng.

**f)Mệnh đề 6  Mệnh đề 1:**

Vì mỗi cặp đỉnh đều có xích nối; vậy G liên thông.

Vì mỗi cặp đỉnh chỉ có 1 xích nối duy nhất vậy G không chứa chu trình.

**6.4.3. Bài toán liệt kê cây**

Cho một đồ thị vô hướng đủ, có n đỉnh:



Vấn đề đặt ra là  chứa bao nhiêu cây bao nhiêu trùm khác nhau. Nói cách khác, nếu có n đỉnh thì có thể tạo ra bao nhiêu cây bao trùm khác nhau.

Trả lời câu hỏi này, ta có định lý sau đây:

1. ***Định lý Kelly (1889).***

***Với n đỉnh cho trước, có đúng*** ***cây bao trùm khác nhau.***

***Chứng minh.***

Ta đánh dấu một đỉnh  và kí hiệu  là số cây khác nhau mà đỉnh x có bậc là k và tìm công thức cho .

Giả sử A là một cây nào đó mà đỉnh x của nó có bậc là . Nếu loại khỏi A cạnh  không kề với x thì ta được 2 cây con, trong đó có 1 cây con chứa x và một trong 2 đỉnh y hoặc z; giả sử cây con đó chứa x và y như hình 6.16.



**Cây A với  Hai cây con thu được khi loại**

**cạnh (y, z ) khỏi cây A**

**Hình 6.16**

Ta nối x và z thì được cây B mà 



**Hình 6.17. Cây B với **

Ta gọi cặp cây  nêu trên là một bó nếu thu được từ A bằng cách mà mô tả và tìm số bó có thể có.

Cây A có thể chọn theo  cách; còn cây B thì xác định đơn trị theo cách chọn cạnh . Số cách chọn cạnh  bằng số cạnh của cây  trừ đi bậc của x (là ); đó là  cách.

Bây giờ ta tìm số bó  theo một cách khác. Ta thấy rằng B là một cây mà . Ta ký hiệu  là các cây không chứa x thu được bằng cách loại khỏi B một trong những cạnh kề với x.



**Cây B với  Cây A với **

**Hình 6.18**

Giả sử ta loại cạnh  với  (Trên hình 6.18 là ); khi đó cây A với  có thể thu được bằng cách nối  với một đỉnh U thuộc cây con khác (trên hình 6.18: ). Rõ ràng cặp cây  trên hình 6.17 cũng là một bó và mọi bó cũng có thể thu được bằng cách đó. Cây B có  cách chọn, còn số cách nối  với các đỉnh U của một cây khác nào đó là , trong đó  là số đỉnh của cây . Vậy số bó  là:



Vì 

Từ đó suy ra:

 với 

Vì chỉ có một cây duy nhất chứa đỉnh x mà 

Từ đó suy ra: 

Thay k bởi  sẽ có:





………………………………..



Thay  thì sẽ có:



Vậy số cây bao trùm khác nhau là:



Đặt  và  thì ta sẽ có:



**Định lý đã được chứng minh.**

*Thí dụ.* Với  ta có ;  thì .

H.1 H.2 H.3 H.4 H.5

Đồ thị đủ, n =4, 6 cạnh Cây kiểu 1 Cây kiểu 2 Cây kiểu 3 Cây kiểu 4

*4 cây 4 cây 4 cây 4 cây*

## 

## 

## BÀI TẬP CHƯƠNG 6

**6.1.** Biểu diễn các đồ thị dưới đây dưới dạng ma trận

a) b)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | lij | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 1 | 0 | 4 | 6 | ꝏ | ꝏ | ꝏ |
|  | 2 | ꝏ | 0 | 3 | ꝏ | ꝏ | ꝏ |
|  | 3 | ꝏ | ꝏ | 0 | 5 | 9 | ꝏ |
|  | 4 | ꝏ | ꝏ | ꝏ | 0 | 6 | ꝏ |
|  | 5 | ꝏ | ꝏ | ꝏ | ꝏ | 0 | 4 |
|  | 6 | 5 | 7 | 12 | 8 | ꝏ | 0 |

**6.2.** Hãy vẽ các đồ thị tương ứng với các ma trận dưới đây

a)  b) 

**6.3.** Có 5 đấu thủ A, B, C, D, E thi đấu bóng bàn

- A thắng B, C, D - B thắng C, D - C thắng D, E - D thắng E - E thắng A, B.

Hãy biểu diễn kết quả thi đấu bằng một đồ thị có hướng, trong đó mỗi đấu thủ được coi là 1 đỉnh và nếu x thắng y thì có cung nối từ x đến y.

**A**

**E B**

**D C**

**6.4.** Đồ thị dưới đây thể hiện kết quả thi đấu cờ tướng của 5 kỳ thủ. Hãy chỉ rõ ai thắng những ai.



**6.5.** Cho các tập . Ta định nghĩa đồ thị giao của các tập trên là một đồ thị vô hướng có các đỉnh là  nếu  thì có cạnh nối  và . Hãy lập đồ thị giao của các tập dưới đây.

a)  b) 

 

 

**6.6.** Tìm bậc của các đỉnh của các đồ thị cho dưới đây.

a/ b/



**6.7.** Cho một đồ thị vô hướng  đủ và có 10 đỉnh.

a) Tìm số cạnh m của đồ thị.

b) Có bao nhiêu cây bao trùm?

c) Có bao nhiêu cây có độ dài ?

d) Có bao nhiêu cây có độ dài ?

**6.8.** Cho  là một đồ thị vô hướng, đủ và có 8 đỉnh.

a) Có bao nhiêu cây bao trùm?

b) Có bao nhiêu cây bao trùm có 1 đỉnh bậc 5?

c) Có bao nhiêu cây bao trùm chứa 1 cạnh cho trước?

d) Có bao nhiêu cây bao trùm không chứa 1 cạnh cho trước?

**6.9.** Cho  là một đồ thị vô hướng, đủ và có 10 đỉnh.

a) Có bao nhiêu đồ thị con khác nhau?

b) Có bao nhiêu đồ thị bộ phận khác nhau?

c) Có bao nhiêu đồ thị con là đồ thị Euler?

d) Có bao nhiêu đồ thị con không phải là đồ thị Euler?

**6.10.** Cho  là một đồ thị vô hướng, đủ và có 7 đỉnh.

a) Có bao nhiêu cây bao trùm không có đỉnh nào bậc 6?

b) Có bao nhiêu cây bao trùm không có đỉnh nào bậc 5?

c) Có bao nhiêu đồ thị con có số đỉnh là lẻ?

d) Có bao nhiêu đồ thị bộ phận có số đỉnh là chẵn?

**6.11.** Có thể vẽ được một đồ thị đơn 5 đỉnh với các bậc như dưới đây không? Nếu có thì vẽ đồ thị đó.

a) 

b) 

c) 

d) 

Chương 7: CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN ĐỒ THỊ

Lần lượt xét 3 bài toán tối ưu quan trọng sau đây có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực thực tế và lý thuyết.

## .1. BÀI TOÁN CÂY BAO TRÙM NGẮN NHẤT

Cho  là đồ thị vô hướng và liên thông;  ta gán cho nó 1 số  gọi là độ dài của cạnh v. Gọi T là một cây bao trùm nào đó và *T* là tập mọi cây bao trùm của G. Ta định nghĩa độ dài của cây T là:



Bài toán đặt ra hãy tìm  *T* sao cho

*T*

Cây  gọi là ***cây bao trùm ngắn nhất***, hoặc còn gọi là ***cây khung cực tiểu***.

Hiện nay có hai thuật toán thông dụng giải bài toán này.

***a) Thuật toán Kruskal- Xuất phát từ cạnh ngắn nhất có thể (không tạo chu trình).***

Bước 1: Sắp xếp các cạnh theo thứ tự độ dài không giảm. (Cạnh đầu ngắn nhất).

Bước 2: Bắt đầu ***từ cạnh đầu tiên ngắn nhất***, ta thêm dần các cạnh tiếp theo với nguyên tắc: cạnh thêm vào ***không tạo thành chu trình*** với các cạnh đã chọn. Thuật toán kết thúc khi chọn được  cạnh.

*Thí dụ.* Tìm cây bao trùm ngắn nhất của đồ thị dưới đây:



**Hình 7.1**

Các cạnh được sắp xếp theo dãy không giảm của độ dài:

{2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13}

Đầu tiên ta chọn các cạnh có độ dài 2 và 3, cạnh có độ dài 4 bị loại vì nó tạo thành chu trình với hai cạnh đã chọn, ta chọn tiếp cạnh có độ dài 5, trong 2 cạnh có dộ dài 6 ta chỉ chọn 1. Vì nếu chọn cả 2 thì chúng sẽ tạo thành chu trình; cạnh độ dài 7 và 8 cũng bị loại vì lý do đó; ta chọn tiếp cạnh 9 là đủ 5 cạnh (vì có 6 đỉnh) và thuật toán kết thúc. Có 2 cây bao trùm ngắn nhất như hình 7.2 dưới đây:



**Hình 7.2**



Với các đồ thị phức tạp hơn, ta sử dụng ma trận trọng số.

Chẳng hạn, biểu diễn đồ thị 7.1 bằng ma trận trọng số:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 2 | 4 | 8 | 6 | 10 |
|  | 2 | 0 | 3 |  |  | 12 |
|  | 4 | 3 | 0 | 5 | 6 | 13 |
|  | 8 |  | 5 | 0 | 7 |  |
|  | 6 |  | 6 | 7 | 0 | 9 |
|  | 10 | 12 | 13 |  | 9 | 0 |

* *Theo thuật toán Krusskal, xuất phát từ cạnh ngắn nhất*
* *Bước 1: Chọn min các ô trong bảng: có cạnh (x1,x2)*
* *Bước 2: Chọn min trong hàng 1 và hàng 2: có cạnh (x2,x3) – loại (x1,x3)*
* *Bước 3: Chọn min trong các hàng 1, 2, 3 còn lại: có (x3,x4)*
* *Bước 4: Chọn min còn lại trong các hàng 1, 2, 3, 4: có (x1,x5) hoặc (x3,x5)*
* *Bước 5: Chọn min còn lại:trong các hàng 1,2,3,4,5 : có (x5,x6)*

*Vậy có 2 cây bao trùm ngắn nhât là có cùng độ dài là: 2 + 3 + 5 + 6 + 9 = 25*

*(x1,x2)(x2,x3)(x3,x4)(x1,x5)(x5,x6) và (x1,x2)(x2,x3)(x3,x4)(x3,x5)(x5,x6)*

***Chú thích:***

* Có thể dế dàng thấy được một thuật toán đối ngẫu của thuật toán Kruskal trên đây ***Xuất phát từ loại bỏ cạnh dài nhất có thể (không mất liên thông)***
* Bước 1: Sắp xếp các cạnh theo thứ tự độ dài không tăng (Cạnh đầu dài nhất).
* Bước 2: Bắt đầu từ cạnh đầu tiên, ta loại bỏ dần các cạnh tiếp theo với nguyên tắc: cạnh bị loại không làm mất tính liên thông của đồ thị con còn lại. Thuật toán kết thúc khi đồ thị con còn lại đúng  cạnh.

***b) Thuật toán Prim –***

Khác với thuật toán Kruskal là kết nạp dần từng cạnh sao cho đủ  cạnh; thuật toán Prim ***xuất phát từ 1 đỉnh bất kỳ và kết nạp dần từng đỉnh kề gần nhất sao cho đủ n đỉnh.***

Bước 1: Đặt  trong đó  là đỉnh bất kỳ



Trong đó  và  là tập đỉnh và tập cạnh của cây bao trùm ngắn nhất mà ta chọn ở bước 1, nghĩa là ở bước này ta chọn 1 đỉnh và chưa chọn cạnh nào.

Bước 2: Tìm 



Trong đó  là tập các đỉnh kề với  và  là độ dài của cạnh ; sau đó đặt:



.

Bước k: Ta tìm được  và  là tập  cạnh nối các đỉnh thuộc , nói cách khác  chính là cây con của cây bao trùm ngắn nhất chứa các đỉnh thuộc .

Nếu  thì thuật toán kết thúc và cây bao trùm ngắn nhất chính là .

Nếu  thì chuyển sang bước  như sau:

Tìm 





Trong đó  là tập các đỉnh không thuộc  và kề với ít nhất 1 đỉnh thuộc ; sau đó đặt: 



Quá trình được lặp lại cho đến khi đạt được  và .

*Thí dụ.* Tìm cây bao trùm ngắn nhất trên đồ thị cho ở hình 7.1. Giả sử chọn:

Bước 1: 

Bước 2: .

Bước 3: .

Bước 4: 



Bước 5: 



Bước 6: 



Kết thúc.

Trong ví dụ trên, vì số đỉnh và số cạnh không lớn, nên ta có thể tìm thấy một cách trực quan. Trong trường hợp số đỉnh và số cạnh khá lớn, để thực hiện thuật toán Prim một cách hiệu quả hơn, nghĩa là nhanh chóng tìm được đỉnh và cạnh để bổ sung và cây bao trùm, ta thực hiện sự gán nhãn cho các đỉnh của đồ thị. Giả sử ở bước khởi tạo ta chọn một đỉnh bất kỳ nào đó, chẳng hạn là ; khi đó nhãn của  là . Số 0 biểu thị khoảng cách từ  đến . Giả sử ở bước k, ta đã có  và . T tìm: ; 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bước lặp | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh |  |  |
| Bước 1  khởi tạo |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Bước 2 |  | - | - |  |  |  |  |  |
| Bước 3 | - | - | - |  |  |  |  |  |
| Bước 4 | - | - | - | - |  |  |  |  |
| Bước 5 | - | - | - | - | - |  |  |  |
| Bước 6 | - | - | - | - | - | - |  |  |

Khi đó nhãn của  là . Sau đó nếu  thì đỉnh  được tuyển và cạnh  bổ sung vào cây khung.

Theo thuật toán Prim, ở bước khởi tạo ta có thể chọn đỉnh bất kỳ, chẳng han chọn , khi đó tại các bước lặp, nhãn của các đỉnh biểu thị bằng bảng dưới đây.

Ở bước 1;  được chọn nên nhãn của nó là cố định trong các bước lặp tiếp theo, ta ghi nhận điều đó bằng các dấu - ; còn  được chọn, ta đánh dấu \*. Sau 6 bước thuật toán kết thúc, ta cũng có 2 lời giải tùy theo ở bước 4 ta chọn cạnh  hay .

Quá trình thực hiện thuật toán được ghi lại trong bảng dưới đây:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bước lặp | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh | Đỉnh |  |  |
| Bước  1  Khởi tạo |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Bước 2 |  | - | - |  |  |  |  |  |
| Bước 3 | - | - | - |  |  |  |  |  |
| Bước 4 | - | - | - | - |  |  |  |  |
| Bước 5 | - | - | - | - | - |  |  |  |
| Bước 6 | - | - | - | - | - | - |  |  |

Quá trình thực hiện thuật toán được ghi lại trong bảng. Ở bước 1;  được chọn nên nhãn của nó là cố định trong các bước lặp tiếp theo, ta ghi nhận điều đó bằng các dấu - ; còn  được chọn, ta đánh dấu \*.

Sau 6 bước thuật toán kết thúc, ta cũng có 2 lời giải tùy theo ở bước 4 ta chọn cạnh  hay .

## 7.2. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

***a) Phát biểu bài toán***

Cho đồ thị có hướng và liên thông , trong đó  mà  và  mà . Nghĩa là không có cung đến S và cũng không có cung đi từ Z. Đỉnh S gọi là đỉnh xuất phát; đỉnh Z là đích cần phải đến;  ta gán cho nó một số  gọi là độ dài của cung u. Ký hiệu T là đường đi từ S đến Z và *T*  và tập mọi đường đi từ S đến Z.

Với mỗi đường đi *T*  ta định nghĩa độ dài của T là:



Bài toán đặt ra là:

Tìm *T*  sao cho *T*

 được gọi là đường đi ngắn nhất từ S đến Z.

Dưới đây là thuật toán giải bài toán này

***b) Thuật toán Dijkstra cải biên.***

Thuật toán Dijkstra dựa vào nguyên lý cơ bản sau đây:

Giả sử  là đường đi ngắn nhất từ S đến Z;  là đỉnh trung gian trên đường này. Kí hiệu  là đường đi từ S đến  trên con đường  thế thì  cũng là đường đi ngắn nhất trong những đường đi từ S đến . Dựa trên nguyên lý này, thuật toán Dijkstra xuất phát từ S, tìm đường đi ngắn nhất đến các đỉnh kề với nó, rồi từ đó lan tỏa dần đến Z.

**Quá trình thuận: Gán nhãn**

***Bước 1***:  gán cho S một số .

***Bước 2***: . Sau đó  ta gán cho nó một số ; đó là đường đi ngắn nhất từ S đến x.

***Bước k***: Tìm ; và  ta gán cho nó một số: 

Nếu  thì thuật toán dừng và  là độ dài của đườλng đi ngắn nhất

**Quá trình ngược: Xác định đường đi**

* Xuất phát từ Z đi ngược theo các cung. Cung (x,y) nào có độ dài bằng đúng hiệu 2 nhãn của đỉnh ngọn và đỉnh gốc: λ (y) – λ(x) = ℓ (x,y) thì chính là một cung đường được sử dụng. Tiếp tục đi ngược cho đến đỉnh xuất phát S. Con đường gồm toàn cung sử dụng chính là một con đường ngắn nhất từ S đến Z. Rõ ràng , do số liệu cụ thể, bài toán luôn có ít nhất 1 lời giải và cũng có thể có nhiều hơn một lời giải.

*Thí dụ*. Tìm đường đi ngắn nhất từ S đến Z trên đồ thị dưới đây:



**Hình 7.3 a**

Bước 1: 

Bước 2: .

Bước 3: .

Bước 4: .

.

Bước 5: .

Bước 6: .

Vậy độ dài của đường đi ngắn nhất từ S đến Z là .



**Hình 7.3b: Số ghi trong hình khuyên tại mỗi đỉnh là độ dài đường đi ngắn nhất từ S đến đỉnh đó**

Muốn tìm đường đi cụ thể thì ta bắt đầu từ Z và lan tỏa ngược lại để tìm các đỉnh thuộc đường đi ngắn nhất kề với nó.

Giả sử x là đỉnh kề với Z. Nếu  thì x là đỉnh thuộc đường đi ngắn nhất. Theo quy tắc này ta tìm được 2 đường đi ngắn nhất.

 và 

.

***c) Thuật toán Dijkstra “cổ điển” dạng bảng***

Trong phần này giới thiệu thuật Dijkstra nguyên thủy dưới dạng bảng, đó là thuật toán xưa nay vẫn dùng và cũng qua đó để so sánh và thấy rõnhững ưu điểm và tiện ích của thuật toán Dijkstra cải biên.

Ý tưởng cơ bản của thuật toán Dijkstra là tìm cách dán nhãn cho các đỉnh. Nhãn của đỉnh  là số  biểu thị khoảng cách ngắn nhất từ S đến , đương nhiên  và .

Trình tự của thuật toán được mô tả như sau:

- *Bước khởi tạo:* tương ứng với *bước 1* của thuật toán Dijkstra cải biên:

Ta đặt:  và 

Sự khác biệt giữa chúng bắt đầu từ bước 2.

- *Bước 2:* Tìm  đó là tập các đỉnh có cung đến từ S.

Trong thí dụ trên, ta có: . Các đỉnh  được gán số như sau:







Các số 5, 8, 13 gọi là nhãn tạm thời của các đỉnh tương ứng, nhãn này thực chất là cận trên của nhãn chính thức mà ta sẽ lần lượt xác định ở các bước lặp tiếp theo.

 nên nó được coi là nhãn chính thức của đỉnh 1. Kết thúc bước này ta đã có 2 đỉnh được dãn nhãn chính thức. Các nhãn chính thức sẽ không thay đổi trong các bước lặp sau.

- *Bước 3:* Tìm ; đó là tập các đỉnh có cung đến từ S và 1. Các điểm này được dán nhãn lại như sau:







Vì  nên nhãn chính thức của đỉnh 2 là 8.

Kết thúc bước này ta có 3 đỉnh để được dán nhãn là S, 1, 2.

- *Bước 4:* Tìm .

Các đỉnh này được dán nhãn như sau:





 và đỉnh 3 được dán nhãn chính thức là 12.

- *Bước 5:*







Đỉnh 5 được dán nhãn chính thức là 14.

- *Bước 6:*







Đỉnh 4 được dán nhãn chính thức là 16.

- *Bước 7:*





Đỉnh 6 được dán nhãn chính thức là 21.

- *Bước 8:*



Đỉnh Z có nhãn chính thức là 26 và thuật toán kết thúc.

Toàn bộ quá trình thực hiện thuật toán có thể tóm tắt bằng bảng dưới đây:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bước lặp | Đỉnh S | Đỉnh 1 | Đỉnh 2 | Đỉnh 3 | Đỉnh 4 | Đỉnh 5 | Đỉnh 6 | Đỉnh Z |
| Bước 1  (khởi tạo) |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | - | - |  |  |  |  |  |  |
| 3 | - | - | - |  |  |  |  |  |
| 4 | - | - | - | - |  |  |  |  |
| 5 | - | - | - | - |  | - |  |  |
| 6 | - | - | - | - | - | - |  |  |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - |  |
| 8 | - | - | - | - | - | - | - |  |

Trong bảng trên, bước 1 tương ứng với dòng thứ nhất; tại các ô tương ứng với đỉnh 1, 2, 3 ta ghi ; các số 5, 8, 13 là các nhãn tạm thời của các đỉnh đó; đó là độ dài của các cung nối S với các đỉnh đó. Đối với các đỉnh 4, 5, 6, Z không có cung nối trực tiếp từ S nên nhãn tạm thời ghi là .

Sang bước 2, nhãn của đỉnh 1 được chính thức hóa, ta ghi dấu \* và ở các bước lặp sau nhãn này không đổi nên ta ghi dấu - ; nhãn tạm thời của đỉnh 3 có thay đổi; đó là , số 12 biểu thị độ dài của đường đi từ S đến đỉnh 3 đi qua đỉnh 1; tương tự nhãn tạm thời của đỉnh 4 là ; số 17 là độ dài của đường đi từ S đến đỉnh 4 qua đỉnh 1. Ở bước cuối cùng nhãn của Z là  biểu thị có 2 đường đi từ S đến Z: qua đỉnh 4 và qua đỉnh 6 và độ dài của chúng đều bằng 26; đó là độ dài của đường đi ngắn nhất.

Từ các điều trình bày trên ta rút ra kết luận sau đây:

**(1).** Mỗi bước lặp của thuật toán Dijkstra dạng bảng chỉ dán nhãn chính thức được 1 đỉnh; đồ thị có 8 đỉnh phải qua 8 bước thuật toán mới kết thúc. Trong khi đó thuật toán Dijkstra cải biên có thể dán nhãn chính thức cho nhiều đỉnh trong cùng một bước; ở bước 2 và bước 4, dán nhãn đồng thời 2 đỉnh nên chỉ cần 6 bước đã có thể kết thúc thuật toán.

**(2).** Ở bước k, thuật toán Dijkstra cải biên đã thay thế tập



bởi tập 

nên đã loại trừ được tất cả những đỉnh phải dán nhãn “tạm thời”; chỉ giữ lại

các đỉnh có thể dán nhãn chính thức ngay trong bước đó; do đó đã loại trừ được một khối lượng tính toán đáng kể. Điều đó giúp cho ta có thể giải bằng tay một cách nhanh chóng và dễ dàng những bài toán có kích thước trung bình.

**(3).** Thuật toán Dijkstra cải biên trình bày ở đây có hiệu lực đối với đồ thị có hướng không có mạch kín. Nếu có mạch kín thì ta cần một giai đoạn “tiền xử lý” để đưa bài toán về dạng “không mạch kín” trước khi áp dụng thuật toán này.

## 7.3. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI (Maximum Flow)

***a) Phát biểu bài toán***

Cho đồ thị có hướng  liên thông và  mà  và  mà . S gọi là đỉnh vào và Z gọi là đỉnh ra của mạng.  ta gán cho nó một số  gọi là tải năng của cung u, đó là lượng hàng hóa tối đa có thể vận chuyển qua cung u trong một đơn vị thời gian nào đó. Với mỗi  ta kí hiệu  và  là tập các cung đến x và tập các cung đi từ x. Một đồ thị như trên được gọi là một **mạng vận tải.**

Ta nói rằng hàm  xác định trên U, nhận các giá trị nguyên, được gọi là một **luồng của mạng vận tải** nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1) , 

2) , 

3) , 

Ý nghĩa của hàm , đó là lượng hàng hóa tải qua cung u trong một đơn vị thời gian, lấy giá trị nguyên, không âm, và không vượt quá tải năng t(u); tại mọi đỉnh trung gian (không kể S và Z) tổng lượng hàng hóa đến một đỉnh nào đó bằng lượng hàng hóa đi khỏi đỉnh ấy. Từ đó suy ra.



 gọi là **cường độ** của luồng, đúng bằng tổng lượng hàng hóa chuyển đến Z.

Luồng  như trên là tồn tại; chẳng hạn . Ta gọi  là tập mọi luồng , rõ ràng 

Bài toán đặt ra là: Tìm  sao cho: 

 gọi là luồng vận tải cực đại của mạng vận tải đã cho.

***b) Thuật toán Ford – Fulkerson (cải biên).*** Một số thuật ngữ sau đây:

- Cung u gọi là **cung bão hòa** nếu .

- Đường đi từ S đến Z gọi là **đường đầy** nếu nó chứa ít nhất một cung

bão hòa.

- Luồng đạt giá trị cực đại, gọi tắt là **luồng cực đại**, nếu mọi đường đi từ

S đến Z đều là đầy.

Dựa vào những khái niệm như trên, thuật toán Ford – Fulkerson có thể mô tả như sau:

*Bước 1:* Chọn một đường đi nào đó từ S đến Z, gọi là  và làm cho  trở thành đầy. Ký hiệu .

Ký hiệu  là tập các cung bão hòa của .

Ta tìm đồ thị bộ phận  của G như sau:

 trong đó  (loại bỏ các cung bão hòa của ) ngoài ra tải năng  của các cung  được xác định như sau:



*Bước 2:* Lặp lại bước 1 đối với đồ thị .

*Bước k:* Lặp lại bước  với đồ thị bộ phận .

Nếu không tìm được đường  từ S đến Z, nghĩa là S và Z thuộc 2 thành phần liên thông khác nhau của  thì thuật toán kết thúc. Khi đó:



Khi giải các bài toán cụ thể trên một mạng vận tải không phức tạp lắm, ta có thể chọn đồng thời một số đường khác nhau từ S đến Z để xử lý cùng một lúc, điều này giúp cho ta rút ngắn thời gian giải bài toán.

*Thí dụ.* Áp dụng thuật toán Ford – Fulkerson để tìm luồng cực đại trên mạng vận tải dưới đây:



**Hình 7.4**

Bước 1: Chọn đồng thời 3 đường:

;  cung bão hòa .

;  cung bão hòa .

;  cung bão hòa .

Đồ thị bộ phận  có dạng:



**Hình 7.5**

Bước 2: Chọn 2 đường từ S đến Z như sau:

;  cung bão hòa .

;  cung bão hòa .

Đồ thị bộ phận  có dạng:



**Hình 7.6**

Bước 3: Chọn ; .

Các cung bão hòa .

Đồ thị  có dạng:



**Hình 7.7**

Đồ thị  thỏa mãn các điều kiện kết thúc của thuật toán

Luồng cực đại có giá trị là:

.

Ta thể hiện luồng cực đại bằng đồ thị trên hình 7.8, trong đó tải năng của các cung bão hòa được đưa vào trong khuyên, còn các cung chưa bão hòa ta chỉ đưa vào khuyên phần đã được sử dụng.



**Hình 7.8**

Từ đồ thị này ta dễ dàng kiểm tra tính chất của luồng tại mỗi đỉnh; chẳng hạn tại đỉnh 3: tổng các số trong khuyên tương ứng với các cung đếnđỉnh 3 là  đúng bằng tổng các số trong khuyên tương ứngvới các cung đi khỏi đỉnh 3 đó là .

Ngoài ra tổng các số trong khuyên tương ứng với các cung đi khỏi đỉnh S là  đúng bằng tổng các số trong khuyên tương ứng với các cung đến Z, đó là .

Đồ thị trên hình 7.8 còn có một ý nghĩa thực tế quan trọng: đó là muốn nâng cao tải năng của mạng thì phải nâng cao tải năng tại các cung bão hòa là cầu nối của các cung không bão hòa; chẳng hạn, nếu nâng cao tải năng của cung  thêm 2 đơn vị thì tải năng của mạng cũng được nâng thêm 2 đơn vị vì nó là cầu nối giữa 2 cung chưa bão hòa là  và .

Nếu chỉ nâng cao tải năng tại các cung chưa bão hòa hoặc chỉ nâng cao tải năng tại các cung bão hòa nhưng không phải là cầu nối giữa 2 cung không bão hòa thì không đem lại hiệu quả thực tế nào trong việc nâng cao tải năng của mạng.

## 7.4. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI VỚI NHIỀU ĐỈNH VÀO VÀ NHIỀU ĐỈNH RA

Giả sử mạng vận tải có p đỉnh vào  và q đỉnh ra Z1, Z2, …, Zq. Ta đưa ra bài toán này về trường hợp có một đỉnh vào và một đỉnh ra bằng cách nối S với tất cả các đỉnh vào và Z với tất cả các đỉnh ra; như hình vẽ dưới đây:



**Hình 7.9**

Còn tải năng của  ta gán cho nó một số bằng tổng các tải năng của các cung đi từ ; và tải năng của cung  bằng tổng tải năng của các cung đến .

Khi đó ta vẫn có thể áp dụng thuật toán Ford – Fulkerson để tìm luồng cực đại cho mạng vận tải này.

**BÀI TẬP CHƯƠNG 7**

**7.1.** Tìm cây bao trùm ngắn nhất của các đồ thị cho dưới đây bằng thuật toán Kruskal và thuật toán Prim.

a) b)



**7.2.** Áp dụng thuật toán Dijkstra, tìm đường đi ngắn nhất từ S đến Z trên đồ thị dưới đây

a)



b)



**7.3.** Áp dụng thuật toán Ford - Fulkerson để tìm luồng cực đại của các mạng vận tải dưới đây:

a)



b)

